Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: 20.. | Naam docent:

3

(1) We schrijven eerst op wat τ doet met elk van de getallen:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

3

Er geldt dus $\tau = (1\,2\,3\,4\,5\,6)(7\,8) \Rightarrow \tau^3 = (1\,2\,3\,4\,5\,6)^3(7\,8)^3 = (1\,4)(2\,5)(3\,6)(7\,8)$

(2) Als we een $\sigma \in A_7$ schrijven als product van disjuncte cycels, dan is de orde van σ het kleinste gemene veelvoud van de cycellengtes. We zoeken dus naar een rijtje getallen $a_1, \ldots, a_n$, zodat $\sum a_i \leq 7$, en $kgv(a_i) = 12$; bovendien moeten we ook een even permutatie krijgen.

3

Om kgv 12 te krijgen, moeten we sowieso een cycellengte hebben die door 3 gedeeld wordt, dwz. lengte 3 of lengte 6. Lengte 6 kan niet want dan is er nog maar 1 getal over en krijgen we niet dat kgv = 12. In het geval van lengte 3 zijn er nog 4 over, en die hebben we precies nodig om een 4-cycel te maken, zodat kgv = 12. Maar het product van een 3-cycel en een 4-cycel is oneven. Er zijn dus geen elementen van orde 12 in A_7.

In A_8 kunnen we ook een cycel van lengte 6 maken, maar dan hebben we nog maar 2 getallen over, zodat de kgv-eigenschap niet werkt. Als we een cycel van lengte 3 nemen, hebben we ook een cycel van lengte 4 nodig, maar alweer levert dat een oneven permutatie. Er zijn dus geen elementen van orde 12 in A_8.

(3) Schrijf τ als product van cycels $c_1, \ldots, c_n$, die disjunct zijn. Dan geldt: $\tau^2 = c_1^2 c_2^2 \cdots c_n^2$. We hoeven dus alleen aan te tonen dat het kwadraat van een willekeurig cycel even is. Neem een cycel $c = (a_1\, a_2 \ldots a_n)$: als n even, dan $c^2 = (a_1\, a_3 \ldots a_{n-1}) \cdot (a_2\, a_4 \ldots a_n)$, en dit is het product van twee even lange cycels, dus even. Als n oneven, dan $c^2 = (a_1\, a_3\, a_5 \ldots a_n\, a_2 \ldots a_{n-1})$, met oneven lengte, dus even. Hiermee is aangetoond dat $\tau^2 \in A_n\ \forall \tau$.

3

Omgekeerd zien we, dat in het kwadraat ieder "even" n-cycel twee cycels van lengte $\frac{1}{2}n$ levert, en ieder oneven n-cycel één cycel van lengte n. Beschouw nu $\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$ ~~[illegible]~~ $\in A_6$. Dit kan niet het kwadraat van een element uit S_6 zijn, want we hebben één 2-cycel en één 4-cycel.

(4)

6

(a) Een lineaire afbeelding uit de symmetriegroep Sym F van $\mathbb{Z}^2$ moet i.h.b. de punten $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ en $(1,1)$ vasthouden,(*) dus Sym F $\subset$ D_4, en D_4 bestaat uit de volgende 8 elementen: draai$_{90°}$, draai$_{180°}$, draai$_{270°}$, I, draai$_{90°}$ ∘ spiegel-x-as, draai$_{180°}$ ∘ spiegel-x-as, draai$_{270°}$ ∘ spiegel-x-as, en spiegel-x-as. Zoals gemakkelijk te zien is, beelden al deze afbeeldingen ook $\mathbb{Z}^2$ op $\mathbb{Z}^2$ af. (We nemen aan dat draaien met de klok mee is).

Deze symmetriegroep is niet commutatief; immers, beschouw de afbeeldingen
$x =$ draai$_{90°}$ ∘ spiegel-x-as ; $y =$ spiegel-x-as ∘ draai$_{90°}$.
Er geldt $x((1,1)) = (-1,1)$, en $y((1,1)) = (1,1)$, dus $x \neq y$, dus is de groep niet commutatief.

(*): Immers, de oorsprong wordt naar zichzelf afgebeeld vanwege lineariteit, en dit zijn de enige 4 punten met afstand $\sqrt{2}$ van de oorsprong in $\mathbb{Z}^2$, en wegens afstandsbehoud worden ze op 4 verschillende punten afgebeeld.

8

(b) We kunnen de 8 lineaire afbeeldingen respectievelijk schrijven als

draai$_{90°}$ → $(x,y) \mapsto (y,-x)$
draai$_{180°}$ → $(x,y) \mapsto (-x,-y)$
draai$_{270°}$ → $(x,y) \mapsto (-y,x)$
I → $(x,y) \mapsto (x,y)$
draai$_{90°}$ ∘ sp → $(x,y) \mapsto (-y,-x)$
draai$_{180°}$ ∘ sp → $(x,y) \mapsto (-x,y)$
draai$_{270°}$ ∘ sp → $(x,y) \mapsto (y,x)$
sp → $(x,y) \mapsto (x,-y)$

Dit zijn precies de $\sigma(x,y) = (\pm x, \pm y)$, en $\sigma(x,y) = (\pm y, \pm x)$. We weten dat elke afstandsbehoudende afbeelding bestaat uit een translatie en een lineaire afbeelding. Translaties van F naar F zijn van de vorm $\sigma(x,y) = (x+n, y+m)$ voor $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, dus combinaties zijn inderdaad van de gegeven vorm.

8

(5)

3

Er is een stelling die zegt dat er één Sylow p-groep is (dat wil in dit geval zeggen, een groep met p^n elementen), dan en slechts dan als een Sylow p-groep normaaldeler is. Een Sylow p-groep bestaat altijd (immers, het aantal is $\equiv 1 \bmod p$); zeg dat H een Sylow p-groep is. Vanwege commutativiteit geldt $\forall g \in G, \forall h \in H$ dat $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H$, dus H is een normaaldeler, er is dus één groep met p^n elementen.

8

6

~~Een ondergroep met 3 elementen heeft, [illegible] (1), 2 elementen van orde 3, die allebei [illegible] zijn.~~

De ondergroepen met 3 elementen zijn de Sylow-3-groepen in S_4 (immers, $\# S_4 = 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$), dus zijn ze onderling geconjugeerd

3

Voorbeelden v. ondergroepen met 4 elementen zijn ~~[illegible]~~ groepen met een 4-cycel, zoals $\langle (1\,2\,3\,4) \rangle$ ~~[illegible]~~ $= \{ (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2), (1) \}$.
Als we $(1\,2\,3\,4)$ conjugeren met een $\tau \in S_4$, krijgen we: $\tau (1\,2\,3\,4) \tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4))$, met andere woorden, we krijgen wéér een 4-cycel in iedere groep die we kunnen krijgen door $\langle (1\,2\,3\,4) \rangle$ te conjugeren.
Dit betekent dat bijvoorbeeld de groep $\{ (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4), (1) \}$ niet onderling met $\langle (1\,2\,3\,4) \rangle$ geconjugeerd is.

(8)

Om aan te tonen dat N een normaaldeler is, bewijzen we dat $\forall g \in G$, $\forall n \in N$ geldt: $gng^{-1} \in N$. Stel $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, en $n = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan geldt, immers: $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a/b \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$, en dus

$gng^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a/b \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a/b \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c/b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$,

zodat $gNg^{-1} \subset N$. ~~[illegible]~~ Voor een of andere $n' \in N$ geldt ook dat $g^{-1} n' (g^{-1})^{-1} = n$, dus $gng^{-1} = n'$, dus $N \subset gNg^{-1}$. Conclusie: $gNg^{-1} = N$, dus N is een normaaldeler.

3

Beschouw de afbeelding $\varphi: G \to \mathbb{R}^*: \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = b$. Dan geldt:
$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & c+ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}\right) = bd = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) * \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)$, dus φ is een homomorfisme. Bovendien is φ surjectief, want iedere $b \in \mathbb{R}$ is $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$. Er geldt $\ker \varphi = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b = 1\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = N$. N is dus de kern van een homomorfisme van G naar een andere groep, waaruit we direct concluderen dat N een normaaldeler is, en bovendien dat $\varphi: G/N \to \mathbb{R}^*$ injectief is, waaruit volgt dat G/N isomorf is met het beeld van G, dat, zoals we zagen, gelijk is aan $\mathbb{R}^*$, dus ook $G/N \cong \mathbb{R}^*$.

(7)

We weten dat geldt: $5005 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, en dus

$$(\mathbb{Z}/5005\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$$

met het isomorfisme:

$$\varphi(a \bmod 5005) = (a \bmod 5,\ a \bmod 7,\ a \bmod 11,\ a \bmod 13)$$

Hieruit volgt dat

3

$$n^3 \equiv 1 \bmod 5005 \Leftrightarrow n^3 \equiv 1 \bmod 5 \wedge n^3 \equiv 1 \bmod 7 \wedge n^3 \equiv 1 \bmod 11 \wedge n^3 \equiv 1 \bmod 13.$$

Wat rekenen geeft dat:

$n^3 \equiv 1 \bmod 5 \Leftrightarrow n \equiv 1 \bmod 5$
$n^3 \equiv 1 \bmod 7 \Leftrightarrow n \in \{1 \bmod 7,\ 2 \bmod 7,\ 4 \bmod 7\}$
$n^3 \equiv 1 \bmod 11 \Leftrightarrow n \equiv 1 \bmod 11$
$n^3 \equiv 1 \bmod 13 \Leftrightarrow n \in \{1 \bmod 13,\ 3 \bmod 13,\ 9 \bmod 13\}$

Elke combinatie geeft, omdat φ een isomorfisme is, een getal n met $n^3 \equiv 1 \bmod 5005$, dus er zijn in totaal precies $1 * 3 * 1 * 3 = 9$ zulke getallen.